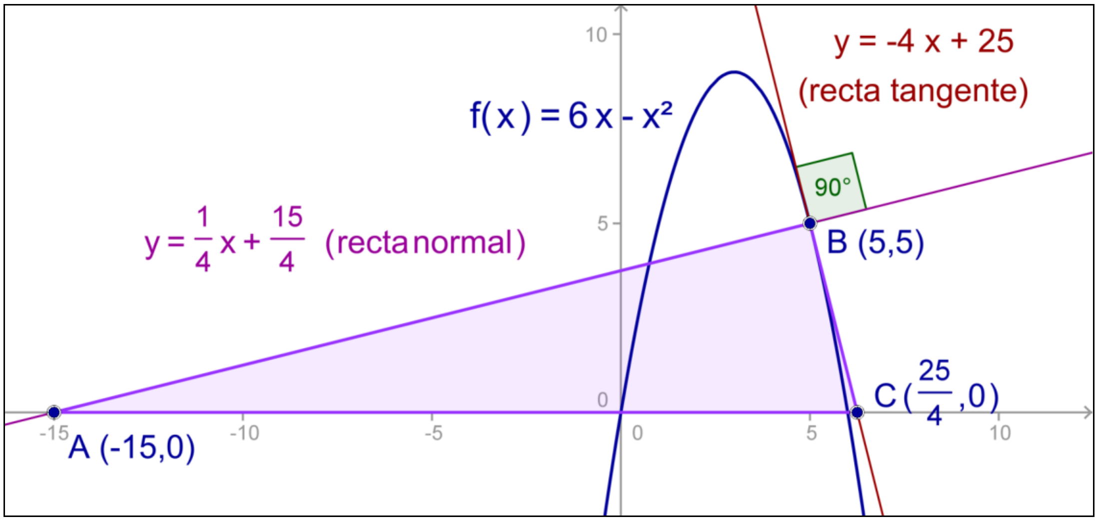
2. Calcular el área del triángulo formado por el eje de las x, la tangente y la normal a la gráfica de $f(x)=6x-x^2$ en el punto $(5,5)$. (Sol. $425/8$).



$$\text{Como } \measuredangle ABC = 90^\circ \text{, entonces: Área del triángulo } = \frac{(AB)(BC)}{2}$$

Así que el problema se reduce a conocer la longitud de los segmentos AB y BC. Para ello, falta conocer las ecuaciones de las rectas tangente L_1 y normal L_2 y, su respectiva intersección con el eje de las x.

Ecuaciones de las rectas:

i) Recta tangente L_1, a $f(x)=6x-x^2$ en el punto $(5,5)$:

$f'(x)=6-2x \Rightarrow f'(5)=-4=m_1$ pendiente de L_1.

Así, la ecuación punto pendiente de L_1, queda: $y=-4(x-5)+5$,

Por tanto, su intersección con el eje de las x, se da cuando $y=0$.

$$-4(x-5)+5=0 \Rightarrow -4x+20+5=0 \Rightarrow x=\frac{-25}{-4}=\frac{25}{4}.$$

Así: $C\left(\frac{25}{4},0\right)$ es uno de los vértices del triángulo.

ii) Recta normal L_2, a $f(x)=6x-x^2$ en el punto $(5,5)$:

Pendiente de L_2: $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}=\dfrac{1}{4}$

Así, la ecuación punto pendiente de L_2, queda: $y=\dfrac{1}{4}(x-5)+5$,

Por tanto, su intersección con el eje de las x, se da cuando $y=0$.

$$\frac{1}{4}(x-5)+5=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}x-\frac{5}{4}+5=0 \;\Rightarrow\; x=-15.$$

Así: $A(-15,0)$ es otro de los vértices del triángulo.

Longitud de segmentos:

i) Segmento AB:

$$d(A,B)=\sqrt{(5-(-15))^2+(5-0)^2} = \sqrt{20^2+5^2} = \sqrt{425}$$

ii) Segmento BC:

$$d(B,C)=\sqrt{\left(\frac{25}{4}-5\right)^2+(0-5)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+5^2} = \frac{\sqrt{425}}{4}$$

Área del triángulo ABC:

$$Area(\triangle ABC)=\frac{\left(\sqrt{425}\right)\left(\dfrac{\sqrt{425}}{4}\right)}{2} = \frac{425}{8}$$