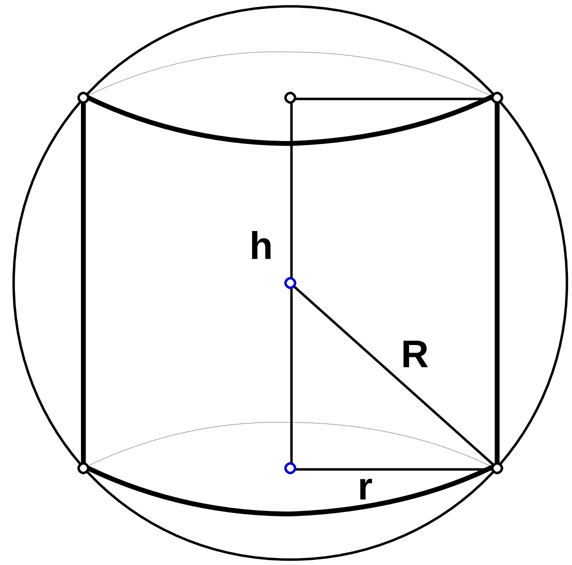
4. Una esfera sólida homogénea pesa P Kg. ¿Cuál es el peso Q del mayor cilindro circular recto que puede cortarse de la esfera?. (Sol. $Q = \frac{P}{\sqrt{3}}$).



Por ser una esfera homogénea, el cilindro de mayor peso que se puede cortar de la esfera, es aquel cuyo volumen sea máximo.

Así, la proporción entre volúmenes, es la misma que entre los pesos.

Sabemos que el volumen del cilindro está dado por:

$$V = \pi r^2 h \qquad (1)$$

Esta cantidad hay que maximizarla, pero para ello hay que ponerla en términos de la altura h del cilindro y del radio R de la esfera que lo contiene.

Se observa que: $R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 \qquad \Rightarrow \qquad r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \qquad (2)$

Sustituyendo (2) en (1), nos queda: $V(h)=\pi\left(R^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)h$

De donde: $V'(h)=\pi\left(R^2-\frac{3h^2}{4}\right)$ (3)

Para obtener el máximo, debemos tener que: $V'(h)=0 \quad \Rightarrow \quad h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$ (4)

Sustituyendo (2) y (4) en (1), tenemos que: $V=\pi\left(R^2-\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3$.(Volumen máximo del cilindro).

Realizando el cociente: $\frac{Volumen\ cilindro}{Volumen\ esfera}=\frac{\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, que es la proporción entre los volúmenes y como es la misma proporción entre los pesos, tenemos que: $\frac{Q}{P}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, de donde:

$$Q=\frac{P}{\sqrt{3}}\ kg$$

Peso del cilindro circular recto que puede cortarse de la esfera.