

6. Sabiendo que si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$, demostrar que la ecuación $e^x = x+1$, sólo tiene una raíz real, a saber $x = 0$.

Es fácil ver que $x=0$ es solución de la ecuación dada. La demostración estará completa, cuando hagamos ver que es la única.

Para ello, definimos: $f(x) = e^x - x - 1$. Demostraremos que ésta función sólo tiene un mínimo, a saber $x = 0$ y su valor mínimo es $f(0) = 0$. Veamos:

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$, único punto singular. Ahora obtenemos la segunda derivada:

$f''(x) = e^x > 0 \forall x$, en particular, para $x = 0$. Por lo tanto, en $x = 0$, hay un mínimo local y además, $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

Así, la ecuación dada: $e^x = x+1$, sólo tiene una raíz real, $x = 0$.

