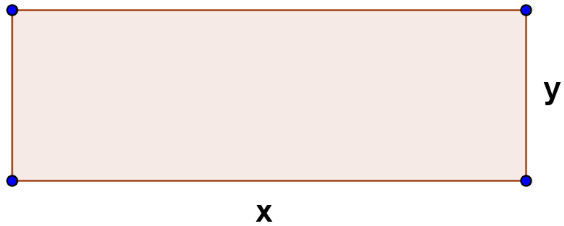
8. Demostrar que entre todos los rectángulos de área A>0, dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.



Sabemos que: $\begin{array}{ll} A = xy & (1)\ \textit{área} \\ P = 2x + 2y & (2)\ \textit{perímetro} \end{array}$

Como queremos minimizar el perímetro, entonces requerimos expresar su fórmula en términos de una sola variable y luego aplicarle el procedimiento para calcular los puntos singulares, etc.

Despejando y de (1), tenemos que:

$$y = \frac{A}{x} \quad \Rightarrow \quad P(x) = 2x + 2\left(\frac{A}{x}\right)$$

Entonces: $P'(x) = \dfrac{2x^2 - 2A}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{A}$, único punto singular.

Ahora bien, $P''(x) = \dfrac{4A}{x^3} \quad \Rightarrow \quad P''\left(\sqrt{A}\right) = \dfrac{4A}{\left(\sqrt{A}\right)^3} = \dfrac{4}{\sqrt{A}} > 0$.

De donde tenemos que el perímetro mínimo es cuando: $x = \sqrt{A} \overset{sust.\ en\ (1)}{\Longrightarrow} y = \sqrt{A}$ y por lo tanto se trata de un cuadrado.