Hallar la derivada de la siguiente función $\int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t \, dt$

Solución.

$$\text{Sea } H(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t \, dt$$

$H(x)$ es la composición de dos funciones, a saber, de la función $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3 t \, dt$ con la función $c(x) = x^3$. Pues,

$$(F \circ c)(x) = F(c(x)) = \int_a^{c(x)} \operatorname{sen}^3 t \, dt = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t \, dt = H(x)$$

Puesto que $f(t) = \operatorname{sen}^3 t$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3 t \, dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.

Por otro lado, la función $c(x) = x^3$ es también derivable para todo número x .

Entonces, por la Regla de la Cadena, tenemos

$$H'(x) = F'(c(x))g'(x) = f(c(x))g'(x) = f(x^3)3x^2 = \operatorname{sen}^3(x^3)3x^2 = 3x^2 \operatorname{sen}^3(x^3)$$

$$\text{Por tanto, } \left(\int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t \, dt \right)' = 3x^2 \operatorname{sen}^3(x^3).$$