Hallar la derivada de la siguiente función $\int_3^{\left(\int_1^x \text{sen}^3 t \, dt\right)} \text{sen}^3 t \, dt$

Solución.

$$\text{Sea } H(x) = \int_3^{\left(\int_1^x \text{sen}^3 t \, dt\right)} \text{sen}^3 t \, dt .$$

La función $H(x)$ es la composición de dos funciones, a saber, la función $F(x) = \int_3^x \text{sen}^3 t \, dt$ con la función $c(x) = \int_1^x \text{sen}^3 t \, dt$, como se muestra a continuación:

$$(F \circ c)(x) = F(c(x)) = F\left(\int_1^x \text{sen}^3 t \, dt\right) = \int_3^{\int_1^x \text{sen}^3 t \, dt} \text{sen}^3 t \, dt = H(x)$$

Por otro lado, la función $f(t) = \text{sen}^3 t$ es continua en todo $\mathbb{R}$, entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo, tanto la función $F(x)$ como la función $c(x)$ son derivables, y $F'(x) = \text{sen}^3(x) = c'(x)$.

Entonces por la Regla de la Cadena, tenemos

$$(F \circ c)'(x) = F'(c(x))c'(x) = F'\left(\int_1^x \text{sen}^3 t \, dt\right) \text{sen}^3 x = \text{sen}^3\left(\int_1^x \text{sen}^3 t \, dt\right) \text{sen}^3 x = H'(x)$$

$$\text{Por tanto, } H'(x) = \text{sen}^3\left(\int_1^x \text{sen}^3 t \, dt\right) \text{sen}^3 x .$$