

Hallar la derivada de la siguiente función $\int_{15}^x \left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt \right) dy$.

Solución.

$$\text{Sea } H(x) = \int_{15}^x \left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt \right) dy.$$

Si denotemos por $\alpha(y) = \int_8^y \frac{1}{1+t^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt$, entonces podemos escribir $H(x) = \int_{15}^x \alpha(y) dy$

Analizando la función $\alpha(y)$, vemos que la función del integrando $f(t) = \frac{1}{1+t^2 + \operatorname{sen}^2 t}$ es una función continua para todo número real. Así, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función $\alpha(y) = \int_8^y \frac{1}{1+t^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, y por tanto, $\alpha(y)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Entonces, nuevamente por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función

$$H(x) = \int_{15}^x \alpha(y) dy \text{ es derivable y } H'(x) = \alpha(x).$$

$$\text{Por tanto, } H'(x) = \int_8^x \frac{1}{1+t^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt.$$