Hallar la derivada de F^{-1}, en términos de F^{-1}, si $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt, \forall x>0$.

Solución.

Sabemos que si f es una función uno a uno y continua en un intervalo y tal que $f'\left(f^{-1}(x)\right)\neq 0$, entonces su función inversa, f^{-1}, es derivable en x, y

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \qquad \textbf{(*)}$$

Analizando la función $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt, \forall x>0$, obtenemos que por Primer Teorema Fundamental del Cálculo $F(x)$ es derivable puesto que la función $f(t)=\frac{1}{t}$ es continua para todo real positivo. Además, $F'(x)=\frac{1}{x}>0, \forall x>0$. Y puesto que $F'(x)>0, \forall x>0$ entonces $F(x)$ es creciente en $(0,\infty)$. Por tanto, la función $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$ es uno a uno y continua en $(0,\infty)$, y su derivada nunca se anula. Aplicando el resultado (*), tenemos:

$$\left(F^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{F'\left(F^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\frac{1}{F^{-1}(x)}}=F^{-1}(x)$$

Por tanto, $\left(F^{-1}\right)'(x)=F^{-1}(x)$, donde $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

(*) ----- Teorema 5. Capítulo 12, página 329. Spivak.Calculus.