

Hallar la derivada de F^{-1} , en términos de F^{-1} , si $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \forall x \in (-1,1)$.

Solución.

Sabemos que si f es una función uno a uno y continua en un intervalo y tal que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, entonces su función inversa, f^{-1} , es derivable en x , y

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (*)$$

Analizando $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \forall x \in (-1,1)$, vemos que por Primer Teorema Fundamental del Cálculo, $F(x)$ es derivable en $(-1,1)$, ya que la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ es continua en el intervalo $(-1,1)$. Al ser $F(x)$, derivable en $(-1,1)$, entonces es continua en $(-1,1)$.

Además, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es positiva en $(-1,1)$. Por tanto, la función $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ es creciente en $(-1,1)$, y en consecuencia es uno a uno en $(-1,1)$.

Por tanto, $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ es uno a uno y continua en $(-1,1)$, y su derivada nunca se anula.

Aplicando el resultado (*) tenemos:

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-(F^{-1}(x))^2}}} = \sqrt{1-(F^{-1}(x))^2}$$

Por tanto, $(F^{-1})'(x) = \sqrt{1-(F^{-1}(x))^2}$, donde $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \forall x \in (-1,1)$.