Sea $\alpha : R -> R$ la función definida por $\alpha\left(x\right)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Realizar lo siguiente:

**a)** Calcular $\alpha'(x)$ y $\alpha''(x)$.

Solución.

Puesto que $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ es continua $\forall x \in R$, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, se sigue que $\alpha\left(x\right)$ es derivable y $\alpha'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \forall x \in R$

Por otro lado, $\alpha''(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}, \forall x \in R$

**b)** Demostrar que $\alpha\left(x\right)$ es creciente en $\left(-\infty,\infty\right)$

Demostración.

Por el inciso anterior, $\alpha'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \forall x \in R$

Por tanto $\alpha'(x)>0, \forall x \in \left(-\infty,\infty\right)$. Por tanto, $\alpha\left(x\right)$ es creciente en $\left(-\infty,\infty\right)$. **Q.E.D.**

**c)** Demostrar que $\alpha\left(x\right)$ es una función impar. Esto es, demostrar que $\alpha\left(-x\right)=-\alpha\left(x\right)$

Demostración.

$\alpha\left(-x\right)=\int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{-x} f(t)dt$, donde $f\left(t\right)=\frac{1}{1+t^2}$

Sabemos que $\int_{ca}^{cb} f(x)dx = c\int_a^b f(cx)dx$, entonces

$$\alpha\left(-x\right)=\int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_{(-1)0}^{(-1)x} f(t)dt=(-1)\int_0^x f(-t)dt=-\int_0^x \frac{1}{1+(-t)^2}dt=-\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=-\alpha\left(x\right)$$

Por tanto, $\alpha\left(-x\right)=-\alpha\left(x\right)$. **Q.E.D.**

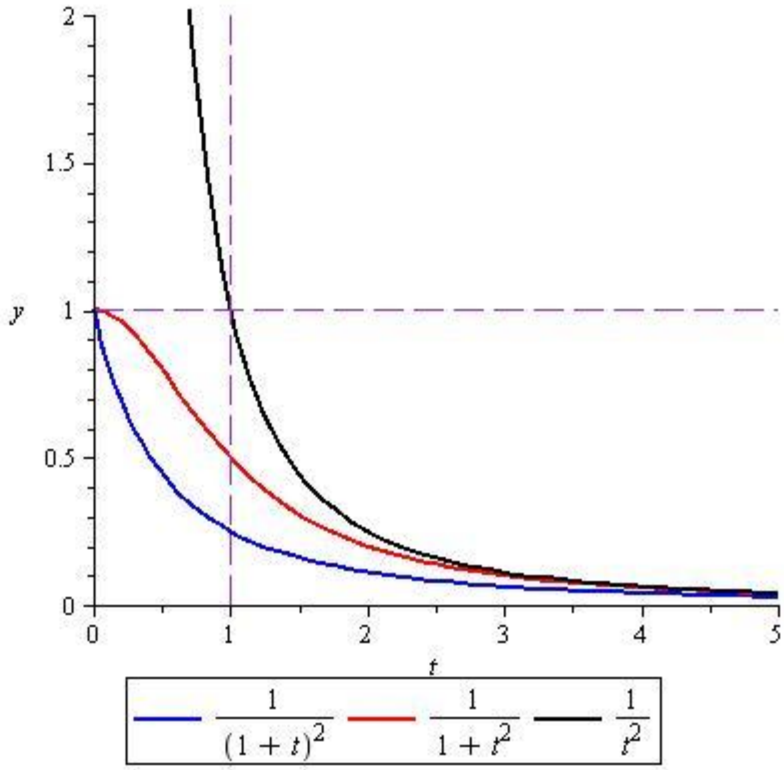
**d)** Demostrar que $\int_0^x \frac{1}{\left(1+t\right)^2}dt \le \alpha\left(x\right) \le 1+\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt, \forall x>1.$

Demostración.

Puesto que $\dfrac{1}{(1+t)^2} \le \dfrac{1}{1+t^2}, \forall t$, entonces $\boxed{\int_0^x \dfrac{1}{(1+t)^2} dt \le \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\, dt, \forall x > 0 \ \cdots \ (1)}$

Por otro lado,

$\dfrac{1}{1+t^2} \le 1, \forall t \in [0,1]$ y $\dfrac{1}{1+t^2} \le \dfrac{1}{t^2}, \forall t > 1$ entonces $\boxed{\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2} dt + \int_1^x \dfrac{1}{1+t^2}\, dt \le 1 + \int_1^x \dfrac{1}{t^2} dt \ \cdots \ (2)}$




De (1) y (2), tenemos $\int_0^x \dfrac{1}{(1+t)^2} dt \le \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\, dt \le 1 + \int_1^x \dfrac{1}{t^2} dt, \forall x > 1$ **Q.E.D.**

**e)** Demostrar que $\alpha(x) \le 2, \forall x > 1$

Demostración.

Por la desigualdad (2) del inciso (d), tenemos

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \le 1 + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt = 1 + \left[\left(-x^{-1}\right) - \left(-1^{-1}\right)\right] = 1 - x^{-1} + 1 = 2 - \frac{1}{x} \le 2, \forall x > 1$$

Por transitividad, se sigue $\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2} dt \le 2, \forall x > 1$ **Q.E.D.**